75.12/95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES – MÉTODOS ITERATIVOS

Ing. Rodolfo A. Schwarz

Año 2021

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

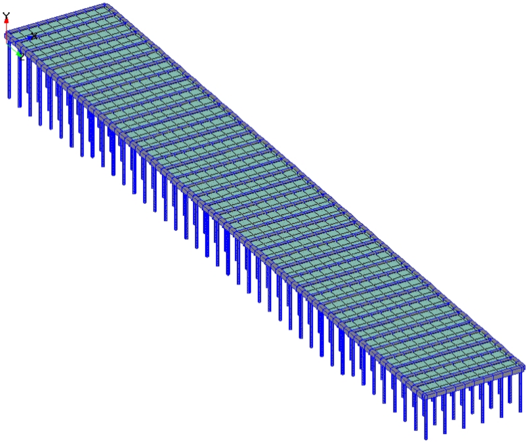
Índice

Métodos Iterativos

- Los métodos vistos, denominados *Métodos Directos*, son generales.
- Sirven para cualquier sistema de ecuaciones lineales (*Eliminación de Gauss*, *Factorización LU*) o para todo tipo de sistema que tenga una matriz $\mathbf{A}$ simétrica definida positiva (*Método de Cholesky*).
- Una característica importante es que el número de operaciones es «finito».
- Son muy eficientes cuando las matrices de coeficientes están formadas con una mayoría de coeficientes no nulos. Por eso reciben el nombre de *sistemas densos*.
- Existen muchos otros sistemas de ecuaciones lineales con características diferentes:
    1. Sistemas con matrices diagonales (tridiagonal, por ejemplo),
    2. Sistemas con matrices «banda»,
    3. Sistemas con matrices cuyos coeficientes son mayormente nulos.
- Estos sistemas se suelen denominar *Sistemas de Ecuaciones Lineales Ralos*.

Métodos Iterativos

- Una vez más, veamos otro modelo estructural:



Métodos Iterativos

- El modelo también se resuelve mediante el *Método de los Elementos Finitos*.
- La cantidad de incógnitas es 19.358 , como se indica en el archivo de salida:
  PROBLEM STATISTICS
  - - - - - - - - - - - - - - - - - -
  NUMBER OF JOINTS/MEMBER+ELEMENTS/SUPPORTS = 3267/ 3826/ 1365
  ORIGINAL/FINAL BAND-WIDTH= 2573/ 48/ 293 DOF
  TOTAL PRIMARY LOAD CASES = 7,
  $\boxed{\text{TOTAL DEGREES OF FREEDOM = 19358}}$
  SIZE OF STIFFNESS MATRIX = 5672 DOUBLE KILO-WORDS
  REQRD/AVAIL. DISK SPACE = 84.1/ 183907.7 MB
- Una cuestión adicional es que el *Sistema de Ecuaciones Lineales* que representa este tipo de modelos es *ralo*.

Métodos Iterativos

- La transformación de las matrices de los *Sistemas de Ecuaciones Lineales Ralos* por algún método numérico puede significar «cambiar» una componente nula por una nueva no nula, con el consiguiente error.
- Es por eso que se han desarrollado métodos que se utilizan casi con exclusividad para resolver este tipo de sistemas.
- Analicemos otra forma de obtener la solución de nuestro sistema. Podemos hacer lo siguiente:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0. \tag{1}$$

- Si sumamos $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$ en ambos miembros tenemos:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}. \tag{2}$$

- Al operar algebraicamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \;\Rightarrow \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{3}$$

Métodos Iterativos

- De esta forma tenemos un método con $\mathbf{x}$ en ambos lados. Lo convertimos en un método iterativo:
$$\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \tag{4}$$
donde $\langle i\rangle$ indica la iteración.
- Una forma simplificada de escribir lo anterior es:
$$\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \mathbf{C}, \tag{5}$$
con $\mathbf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.
- Tenemos que definir la matriz $\mathbf{M}$ y obtener $\mathbf{T}$ y $\mathbf{C}$.

Métodos Iterativos Estacionarios

- Escribamos $\mathbf{A}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} \tag{6}$$

  donde:
  - $\mathbf{D}$: matriz diagonal, con $d_{i\,i} = a_{i\,i}$;
  - $\mathbf{L}$: matriz estrictamente triangular inferior, que cumple con

$$l_{i\,j} = \begin{cases} a_{i\,j} & \text{cuando } i > j, \\ 0 & \text{cuando } i \leq j. \end{cases}$$

  - $\mathbf{U}$: matriz estrictamente triangular superior, que cumple con

$$u_{i\,j} = \begin{cases} 0 & \text{cuando } i \geq j, \\ a_{i\,j} & \text{cuando } i < j. \end{cases}$$

- En todos los casos, $i \in (1, n)$ y $j \in (1, n)$.

Métodos Iterativos Estacionarios

Método de Jacobi

- El primer método surge de proponer que $\mathbf{M} = \mathbf{D}$, denominado *Método de Jacobi*.
- Si operamos en la matriz $\mathbf{T}$ nos queda:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{L} - \underbrace{\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{D}}_{\mathbf{I}} - \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{U} \;\Rightarrow \\ \mathbf{T} &= -\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U}).\end{aligned} \tag{7}$$

- Y si operamos en el vector $\mathbf{C}$ nos queda:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \tag{8}$$

- El *Método de Jacobi* lo podemos expresar así:

$$\mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} = \mathbf{D}^{-1} \cdot [\mathbf{B} - (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle}]. \tag{9}$$

Métodos Iterativos Estacionarios

Método de Jacobi

- La formulación no matricial es:

$$x_j^{\langle i+1 \rangle} = \frac{1}{a_{j\,j}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{j\,k} \cdot x_k^{\langle i \rangle} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{j\,k} \cdot x_k^{\langle i \rangle} \right) \tag{10}$$

- Para poder aplicar el método debemos definir un $\mathbf{x}^{\langle 0 \rangle}$.
- Suele usarse $\mathbf{x}^{\langle 0 \rangle} = \mathbf{0}$.
- Este método es de convergencia lenta y requiere que la matriz $\mathbf{A}$ sea **estrictamente diagonal dominante**, es decir que:

$$|a_{i\,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i\,j}|. \tag{11}$$

Métodos Iterativos Estacionarios

Método de Gauss–Seidel

- El segundo método surge de proponer que $\mathbf{M} = \mathbf{D} + \mathbf{L}$, denominado *Método de Gauss–Seidel*.
- En este caso partimos de $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} + \mathbf{B}$:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} &= (\mathbf{D} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} - (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} + \mathbf{B}, \\
\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} &= (\mathbf{D} - \mathbf{D} + \mathbf{L} - \mathbf{L} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} + \mathbf{B}, \\
\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} &= \mathbf{B} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} \;\Rightarrow \\
\mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} &= \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle}).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

- El método utiliza parte del nuevo vector $\mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle}$ para calcular este vector en forma completa.

Métodos Iterativos Estacionarios

Método de Gauss–Seidel

- La formulación no matricial es:

$$x_j^{\langle i+1\rangle} = \frac{1}{a_{j\,j}}\left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{j\,k}\cdot x_k^{\langle i+1\rangle} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{j\,k}\cdot x_k^{\langle i\rangle}\right) \qquad (13)$$

- Para poder aplicar el método debemos definir un $\mathbf{x}^{\langle 0\rangle}$.
- También suele usarse $\mathbf{x}^{\langle 0\rangle} = \mathbf{0}$.
- Converge más rápido que el *Método de Jacobi*, y también requiere que la matriz $\mathbf{A}$ sea **estrictamente diagonal dominante**, aunque también converge si la matriz es definida positiva.

Métodos Iterativos Estacionarios

Método de las Sobrerrelajaciones Sucesivas

- Un tercer método surge de proponer que $\mathbf{M} = \frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}$, denominado *Método de las Sobrerrelajaciones Sucesivas* (**SOR**).
- También partimos de $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} + \mathbf{B}$:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}\right) \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} &= \left(\frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{L}\right) \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} - (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} + \mathbf{B}, \\
\frac{1}{\omega}\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} &= \left(\frac{1}{\omega}\mathbf{D} - \mathbf{D} + \mathbf{L} - \mathbf{L} - \mathbf{U}\right) \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} + \mathbf{B}, \\
\frac{1}{\omega}\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} &= \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} + \mathbf{B} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} \;\; \Rightarrow \\
\mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} &= (1 - \omega) \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle} + \omega \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}^{\langle i \rangle}).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

- Este método también utiliza parte del nuevo vector $\mathbf{x}^{\langle i+1 \rangle}$ más un coeficiente ω para calcular este vector en forma completa.

Métodos Iterativos Estacionarios

Método de las Sobrerrelajaciones Sucesivas

- La formulación no matricial es:

$$x_j^{\langle i+1\rangle} = (1-\omega)\cdot x_j^{\langle i\rangle} + \frac{\omega}{a_{j\,j}}\left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{j\,k}\cdot x_k^{\langle i+1\rangle} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{j\,k}\cdot x_k^{\langle i\rangle}\right) \tag{15}$$

- El valor de ω debe estar entre 0 y 2, es decir, $0 < \omega < 2$.
- En rigor, $1 < \omega < 2$. Cuando $0 < \omega < 1$, suele denominarse *Método de Jacobi Modificado*.
- El coeficiente ω logra que converja más rápido que los dos métodos vistos. Si la matriz es definida positiva también converge. Generalmente se toma $\omega = 1{,}25$.
- Si $\omega = 1$, se transforma en el *Método de Gauss–Seidel*.
- Puede extenderse la convergencia al caso de matrices $\mathbf{A}$ simétricas definidas positivas.

Métodos Iterativos Estacionarios

Convergencia

- Para determinar la convergencia de los métodos estacionarios, analicemos la matriz $\mathbf{T}$.
- Supongamos que conocemos la solución «exacta» $\mathbf{x}$. Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} + \mathbf{e}^{\langle i+1\rangle} = \mathbf{T}\cdot\left(\mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \mathbf{e}^{\langle i\rangle}\right) + \mathbf{C},\\
\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} + \mathbf{e}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \mathbf{C} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{e}^{\langle i\rangle},\\
\mathbf{e}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{e}^{\langle i\rangle} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}^{\langle i-1\rangle} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}^{\langle i-2\rangle} = \cdots = \mathbf{T}^{i+1}\cdot\mathbf{e}^{\langle 0\rangle}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

- Si queremos que el error $\mathbf{e}^{\langle i+1\rangle}$ sea menor que el error $\mathbf{e}^{\langle 0\rangle}$, entonces se debe cumplir que:

$$\|\mathbf{T}\|_{\infty} < 1. \tag{17}$$

Métodos Iterativos Estacionarios

Convergencia

- Para el *Método de Jacobi* se debe cumplir que:

$$\left\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\right\|_{\infty} < 1. \tag{18}$$

- Eso significa que:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{i\,j}|}{|a_{i\,i}|} < 1 \quad \text{para } i \in (1,n), \tag{19}$$

es decir,

$$|a_{i\,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i\,j}| \quad \text{para } i \in (1,n), \tag{11}$$

expresión que define a una **matriz estrictamente diagonal dominante**.

Métodos Iterativos Estacionarios

Convergencia

- Hay varios teoremas que aseguran las condiciones de convergencia.
- Uno asegura la convergencia del *Método de las Sobrerrelajaciones Sucesivas* cuando $\mathbf{A}$ es *definida positiva*.
- Otros aseguran la convergencia para tipos especiales de matrices.
- Como todo método iterativo, requieren criterios de corte.
- Se usan dos:
  1. El error absoluto:
$$\left\|\mathbf{x}^{\langle n\rangle} - \mathbf{x}^{\langle n-1\rangle}\right\|_{\infty} \leq \mathrm{Tol}.$$
  2. El error relativo:
$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{\langle n\rangle} - \mathbf{x}^{\langle n-1\rangle}\right\|_{\infty}}{\left\|\mathbf{x}^{\langle n\rangle}\right\|_{\infty}} \leq \mathrm{Tol}.$$

Métodos Iterativos No Estacionarios

- Existe otro tipo de métodos iterativos.
- Son los *Métodos Iterativos No Estacionarios*.
- Los obtenemos con la ecuación ya vista:

$$\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{B}. \tag{4}$$

  al proponer la siguiente matriz:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\alpha}\cdot\mathbf{I}.$$

- Al reemplazarla en (4), tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} &= \left(\mathbf{I} - \alpha\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{B}, \\ &= \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha\cdot(\underbrace{\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle i\rangle}}_{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}) \;\Rightarrow\; \boxed{\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} = \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}.\end{aligned} \tag{20}$$

- El modelo depende de α.

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Residuos Mínimos

- El primer método a partir de esta matriz $\mathbf{M}$ se denomina *Método de los Residuos Mínimos* o *Método del Mínimo Residuo*.
- Para hallar este nuevo procedimiento, vamos a analizar el residuo en la iteración $\langle i+1\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}\right), \\ \mathbf{R}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle i\rangle} - \alpha\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}, \\ \mathbf{R}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{R}^{\langle i\rangle} - \alpha\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}. \end{aligned} \tag{21}$$

- Hemos obtenido una relación entre dos residuos: $\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle}$ y $\mathbf{R}^{\langle i\rangle}$.
- Para lograr que $\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle}$ sea menor a $\mathbf{R}^{\langle i\rangle}$, vamos a analizar las normas euclídeas de ambos, de forma que

$$\left\|\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle}\right\|_2 < \left\|\mathbf{R}^{\langle i\rangle}\right\|_2. \tag{22}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Residuos Mínimos

- Para ello vamos a buscar que:

$$\left\| \mathbf{R}^{\langle i \rangle} - \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle} \right\|_2 < \left\| \mathbf{R}^{\langle i \rangle} \right\|_2 . \tag{23}$$

- Existen muchas posibilidad para que se cumpla la expresión (23). Buscaremos aquella que haga que $\mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle}$ sea mínima.
- Para ello vamos a proponer lo siguiente:

$$\frac{\mathrm{d} \left\| \mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle} \right\|_2}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d} \left\| \mathbf{R}^{\langle i \rangle} - \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle} \right\|_2}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \tag{24}$$

- En rigor, resolveremos:

$$\frac{\mathrm{d} \left\| \mathbf{R}^{\langle i \rangle} - \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle} \right\|_2^2}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \tag{25}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Residuos Mínimos

- Si derivamos vectorialmente, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot [\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}]^T \cdot [\mathbf{R}^{\langle i \rangle} - \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}] = 0, \\
&[\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}]^T \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle} = \alpha \cdot [\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}]^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}, \\
&\alpha_i = \frac{[\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}]^T \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}}{[\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}]^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

- El coeficiente α se modifica en cada iteración $\langle i \rangle$, es decir, tenemos un α_i para cada iteración.
- Para que el *Método de los Residuos Mínimos* converja, la matriz $\mathbf{A}$ debe ser *definida positiva*.
- Esto asegura obtener un mínimo.

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Residuos Mínimos

- El método completo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{\langle 0\rangle} &= \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle 0\rangle},\\
\alpha_i &= \frac{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}},\\
\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha_i\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle},\\
\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{R}^{\langle i\rangle} - \alpha_i\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}
\end{aligned} \tag{27}$$

- La convergencia, aún cuando la matriz sea s.d.p., es lenta.
- Analicemos un nuevo método.

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- Un método más eficiente es el conocido como *Método del Descenso Más Rápido* o *del Descenso Más Empinado*.
- Para obtenerlo, tomemos la siguiente función:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{B} + C. \tag{28}$$

- Esta función de conoce como *forma cuadrática*, equivalente a un función cuadrática en una dimensión.
- Podemos calcular su mínimo si hacemos:

$$\frac{\mathrm{d}\,F(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{B} = 0 \tag{29}$$

- Para este método es necesario que la matriz $\mathbf{A}$ sea simétrica, además de definida positiva.

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- Con esta condición nos queda:

$$\frac{\mathrm{d}\,F(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{B} = 0, \tag{30}$$

que resulta ser nuestro *Sistema de Ecuaciones Lineales* escrito de otra forma.

- Pero la ecuación (30) también representa otra cosa:

$$\frac{\mathrm{d}\,F(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = F'(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}\,F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\,F(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\,F(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{31}$$

- Podemos escribir lo siguiente:

$$-F'(\mathbf{x}) = \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}. \tag{32}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- Finalmente, también tenemos que:

$$-F'(\mathbf{x}^{\langle i\rangle}) = \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle i\rangle} = \mathbf{R}^{\langle i\rangle}. \tag{33}$$

- Este nuevo método también parte de:

$$\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} = \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}. \tag{20}$$

- Nuevamente, buscaremos que $\mathbf{R}^{\langle \mathbf{i+1}\rangle}$ sea el menor posible, el mínimo.
- Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\,F(\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle})}{\mathrm{d}\alpha} = F'(\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle})^T\,\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle}}{\mathrm{d}\alpha} = F'(\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle})^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle} = -{\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle}}^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle} = 0. \tag{34}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- Si reemplazamos $\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle}$ por $\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle}$ en (34),nos queda:

$$[\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle}]^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle} = 0. \tag{35}$$

- Pero por (20) tenemos:

$$[\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle})]^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle} = 0. \tag{36}$$

que podemos escribir así:

$$(\mathbf{R}^{\langle i\rangle} - \alpha\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle})^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle} = {\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle} - \alpha\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle})^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle} = 0. \tag{37}$$

- Si despejamos α, nos queda:

$$\alpha_i = \frac{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle})^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}} = \frac{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}. \tag{38}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- El nuevo método completo es:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{\langle 0\rangle} &= \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle 0\rangle}, \\ \alpha_i &= \frac{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}, \\ \mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha_i\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}, \\ \mathbf{R}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{R}^{\langle i\rangle} - \alpha_i\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle} \end{aligned} \tag{39}$$

- Este método converge algo más rápido que el *Método de los Residuos Mínimos* pero sigue siendo relativamente lento.

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- Veamos una muestra mediante representaciones gráficas.
- Primero representemos una *forma cuadrática* para un $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

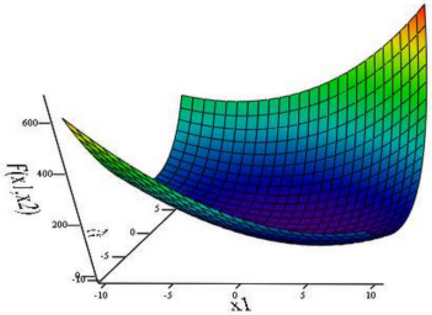


Figura: Forma cuadrática.

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- En un punto determinado, podemos obtener el gradiente y su plano tangente.

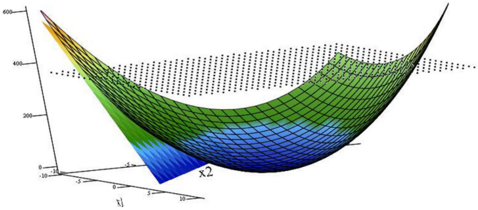


Figura: Forma cuadrática y plano tangente en un punto.

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- Para acercarnos al mínimo de $F(x)$, podemos elegir cualquier dirección contenida en el plano tangente.

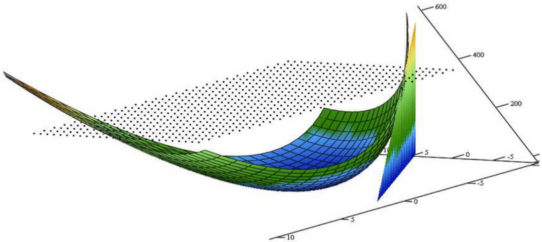
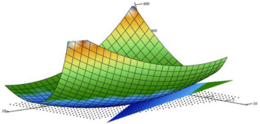


Figura: Forma cuadrática y plano tangente en un punto (2).

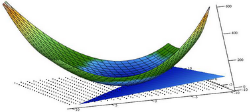
Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

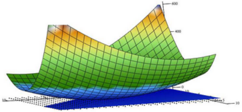
- Con varias iteraciones, obtenemos lo siguiente:



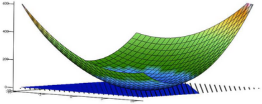
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura: Método del DescensoMás Rápido.

Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- En el punto mínimo el plano tangente debe ser horizontal:

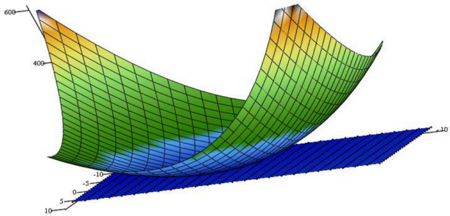


Figura: Método del Descenso Más Rápido. Mínimo y plano tangente.

Método Iterativos No Estacionarios

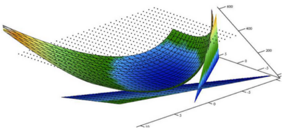
Método del Descenso Más Rápido

- El método solamente determina las direcciones de aproximación considerando que estén contenidas en los planos tangentes (gradientes).
- Tengamos en cuenta que $\mathbf{x}^{\langle i\rangle}$ y $\mathbf{R}^{\langle i\rangle}$ son vectores.
- Al hacer
$$\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} = \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha_i \cdot \mathbf{R}^{\langle i\rangle},$$
estamos sumando vectores.
- La lentitud se debe a que el método repite las direcciones en el proceso iterativo, es decir, usa varias veces algunas direcciones de aproximación.
- Debemos buscar una forma de no repetir direcciones.

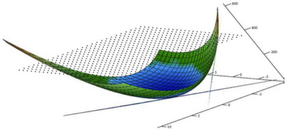
Método Iterativos No Estacionarios

Método del Descenso Más Rápido

- Primera idea: optimizar los gradientes obtenidos en las sucesivas aproximaciones y no repetir direcciones.
- Segunda idea: buscar direcciones ortogonales y evitar repeticiones.
- Problema: buscar direcciones ortogonales limitaría la aplicación de dicho método.



(a)



(b)

Figura: Direcciones ortogonales.

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- Pronodremos un nuevo método denominado *Método de los Gradiente Conjugados*.
- Vamos a definir una nueva aproximación:

$$\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} = \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha_i \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} \tag{40}$$

- En vez de que los vectores $\mathbf{d}^{\langle i\rangle}$ sean ortogonales, es decir, que

$$\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = 0, \tag{41}$$

  propondremos lo siguiente:

$$\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = 0, \tag{42}$$

- Esta condición se denomina *direcciones conjugadas*.

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- Con la misma expresión usada para el *Método del Descenso Más Rápido* pero con la dirección $\mathbf{d}^{\langle i\rangle}$, tenemos:

$$F'(\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle})^T \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = -\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle^T} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = \left[\mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle})\right]^T \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = 0 \qquad (43)$$

- Al desarrollar nos queda:

$$(\mathbf{R}^{\langle i\rangle} - \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle})^T \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = \mathbf{R}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} - \alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle})^T \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = 0 \qquad (44)$$

- Al despejar α obtenemos:

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{R}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle}}{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle})^T \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle}} = \frac{\mathbf{R}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle}}{\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle}}. \qquad (45)$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- Todavía nos falta encontrar las direcciones $\mathbf{d}^{\langle i\rangle}$.
- Debemos obtener un conjunto de direcciones $\mathbf{d}^{\langle 0\rangle}$, $\mathbf{d}^{\langle 1\rangle}, \ldots,$ $\mathbf{d}^{\langle n\rangle}$, que sean conjugadas y obtenidas a partir de los $\mathbf{R}^{\langle i\rangle}$.
- A tener en cuenta: proceso de *Gram-Schmidt* para obtener una base ortogonal con los vectores $\mathbf{d}^{\langle i\rangle}$:

$$\mathbf{d}^{\langle i\rangle} = \mathbf{u}^{\langle i\rangle} + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{i\,j} \cdot \mathbf{d}^{\langle j\rangle}.$$

- El planteo es mediante *direcciones conjugadas*:

$$\mathbf{d}^{\langle i+1\rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = \mathbf{u}^{\langle i+1\rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} + \sum_{j=0}^{i} \beta_{i+1\,j} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = 0 \tag{46}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- Para obtener el coeficiente $\beta_{i+1\,j}$ planteamos:

$$\mathbf{d}^{\langle i+1\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}=\mathbf{u}^{\langle i+1\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}+\sum_{j=0}^{i}\beta_{i+1\,j}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle j\rangle}=0 \tag{47}$$

de la que obtenemos:

$$\mathbf{u}^{\langle i+1\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}+\beta_{i+1\,i}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}=0. \tag{48}$$

- Si despejamos $\beta_{i+1\,i}$:

$$\beta_{i+1\,i}=-\frac{\mathbf{u}^{\langle i+1\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}}{\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}}=-\frac{\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}}{\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}}. \tag{49}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- Vimos previamente que

$$\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle^T} \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = 0,$$

que podemos escribir en forma genérica como

$$\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j\rangle} = 0,$$

- Entonces podemos proponer los siguiente:

$$\mathbf{d}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j\rangle} = \mathbf{u}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j\rangle} + \sum_{k=0}^{i} \beta_{i\,k} \cdot \mathbf{d}^{\langle k\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j\rangle} = 0. \tag{50}$$

- Como $\mathbf{d}^{\langle k\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j\rangle} = 0$, nos queda:

$$\mathbf{u}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j\rangle} = 0 \quad \text{para todo } i < j \tag{51}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- En función de lo anterior, se cumple:

$$\mathbf{d}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle} = \mathbf{u}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}. \tag{52}$$

- Podemos tomar $\mathbf{u}^{\langle j \rangle} = \mathbf{R}^{\langle j \rangle}$.
- Con esto, para un $\mathbf{R}^{\langle j+1 \rangle}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j+1 \rangle} &= \mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j \rangle} - \alpha_j \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot A \cdot \mathbf{d}^{\langle j \rangle}, \\
\alpha_j \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot A \cdot \mathbf{d}^{\langle j \rangle} &= \mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j \rangle} - \mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j+1 \rangle}, \\
\mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot A \cdot \mathbf{d}^{\langle j \rangle} &= \frac{1}{\alpha_j} \cdot (\mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j \rangle} - \mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j+1 \rangle}).
\end{aligned} \tag{53}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- De la expresión anterior podemos establecer que:

$$\mathbf{R}^{\langle i\rangle^T} \cdot A \cdot \mathbf{d}^{\langle j\rangle} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_j} \cdot \mathbf{R}^{\langle i\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle i\rangle} & \text{para } i = j \\ -\frac{1}{\alpha_j} \cdot \mathbf{R}^{\langle j+1\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle j+1\rangle} & \text{para } i = j+1 \ (\leftarrow) \\ 0 & \text{para el resto de los casos.} \end{cases} \tag{54}$$

- Si el caso $\langle j+1\rangle$ lo convertimos en $\langle i+1\rangle$, nos queda:

$$\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle^T} \cdot A \cdot \mathbf{d}^{\langle i\rangle} = -\frac{1}{\alpha_i} \cdot \mathbf{R}^{\langle i+1\rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle i+1\rangle} \tag{55}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- De lo desarrollado anteriormente, tenemos:

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{R}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}}{\mathbf{d}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}}. \tag{45}$$

$$\beta_{i+1\,i} = -\frac{\mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}}{\mathbf{d}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}}. \tag{49}$$

- Si reemplazamos (55) en (49) nos queda:

$$\beta_{i+1\,i} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle^T} \cdot \mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle}}{\mathbf{d}^{\langle i \rangle^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}}. \tag{56}$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- Y si reemplazamos (45) en (56) queda:

$$\beta_{i+1\,i} = \frac{{\mathbf{d}^{\langle i \rangle}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}}{{\mathbf{R}^{\langle i \rangle}}^T \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}} \frac{{\mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle}}^T \cdot \mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle}}{{\mathbf{d}^{\langle i \rangle}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}}. \tag{57}$$

- Al simplificar considerar que en realidad solo necesitamos el caso β_{i+1}, nos queda:

$$\beta_{i+1} = \frac{{\mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle}}^T \cdot \mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle}}{{\mathbf{R}^{\langle i \rangle}}^T \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle}} = \frac{{\mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle}}^T \cdot \mathbf{R}^{\langle i+1 \rangle}}{{\mathbf{R}^{\langle i \rangle}}^T \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}} \tag{58}$$

pues

$${\mathbf{R}^{\langle i \rangle}}^T \cdot \mathbf{d}^{\langle i \rangle} = {\mathbf{R}^{\langle i \rangle}}^T \cdot \mathbf{R}^{\langle i \rangle}.$$

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- El *Método de los Gradientes Conjugados* queda así:

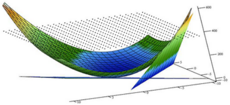
$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}^{\langle 0\rangle} &= \mathbf{R}^{\langle 0\rangle} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^{\langle 0\rangle},\\
\alpha_i &= \frac{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}}{{\mathbf{d}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}},\\
\mathbf{x}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{x}^{\langle i\rangle} + \alpha_i\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle},\\
\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{R}^{\langle i\rangle} - \alpha_i\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle},\\
\beta_{i+1} &= \frac{{\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle}}^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i+1\rangle}}{{\mathbf{R}^{\langle i\rangle}}^T\cdot\mathbf{R}^{\langle i\rangle}},\\
\mathbf{d}^{\langle i+1\rangle} &= \mathbf{R}^{\langle i+1\rangle} + \beta_{i+1}\cdot\mathbf{d}^{\langle i\rangle}.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

- Es un poderoso método para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices ralas simétricas definidas positivas.

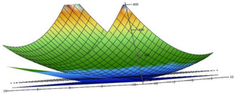
Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

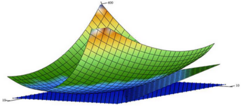
- Si partimos del mismo punto que usamos con el *Método del Descenso Más Rápido*, obtenemos nuestro resultados en dos iteraciones:



(a)



(b)



(c)

Figura: Método de los Gradientes Conjugados.

Método Iterativos No Estacionarios

Método de los Gradientes Conjugados

- Vemos que la convergencia fue casi «instantánea».
- Se demuestra que si no hubieran errores de redondeo, la convergencia se da en «n» iteraciones, siendo «n» el rango de la matriz.
- Más aún, la velocidad de convergencia depende casi exclusivamente de la cantidad de autovalores distintos que tenga la matriz $\mathbf{A}$.
- Si la matriz tiene, por ejemplo, «k» autovalores repetidos, entonces la convergencia será en «$n - k$» iteraciones.
- En las últimas décadas, se han desarrollado numerosos métodos a partir del *Método de los Gradientes Conjugados* para resolver *Sistemas de Ecuaciones Lineales Ralos* de cualquier tipo.

Resumen

- **Método de Jacobi**: converge cuando la matriz es estrictamente diagonal dominante.
- **Método de Gauss-Seidel**: similar al *Método de Jacobi*. Además converge cuando la matriz $\mathbf{A}$ es simétrica definida positiva (SPD).
- **Método de las Sobrerrelajaciones Sucesivas**: converge cuando la matriz $\mathbf{A}$ es SPD pero no es fácil obtener el ω que optimiza la convergencia.
- **Método de los Residuos Mínimos**: converge cuando la matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva. Rapidez similar a Jacobi.
- **Método del Descenso Más Rápido**: sólo para sistemas s.p.d. Suele ser equivalente en rapidez a Gauss-Seidel.
- **Método de los Gradientes Conjugados**: solo para sistemas s.d.p.; gran rapidez de convergencia; si la matriz $\mathbf{A}$ tiene «k» autovalores repetidos, converge en «$n - k$» iteraciones. Muy usado para resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales.

Bibliografía

Burden, R. L., Faires, J. D. & Burden, A. M.
Análisis Numérico.
Décima Edición. CENGAGE Learning, 2016.

Samarski, A. A.
Introducción a los métodos numéricos.
Editorial Mir. 1986.

Saad, Y.
Iterative Methods for Sparse Linear Systems.
Society for Industrial and Applied Mathematics. Second Edition, 2003.

Schwarz, R.
Resumen de clases.